



## CENTRIŠKAI TEMPIAMO GELŽBETONINIO ELEMENTO BETONO ĮTEMPIŲ IR DEFORMACIJŲ PRIKLAUSOMYBĖ PAGAL EC2

Rokas Girdžius, Gintaris Kaklauskas, Renata Zamblauskaitė

*Tiltų ir specialiųjų statinių katedra, Vilniaus Gedimino technikos universitetas,  
Saulėtekio al. 11, LT-10223 Vilnius, Lietuva  
El. paštas [bridge@st.vgtu.lt](mailto:bridge@st.vgtu.lt)  
Įteikta 2007-01-15; priimta 2007-06-07*

**Santrauka.** Straipsnyje nagrinėjama tempiamojo gelžbetoninio elemento apkrovos ir poslinkio priklausomybė pagal EC2 [1]. Pasiūlyta nauja supleišėjusio tempiamojo betono vidutinių įtempimų ir deformacijų priklausomybė nuo betono klasės, armatūros tamprumo modulio ir armavimo koeficiento. Gauti rezultatai palyginti su skaitiniais eksperimentais ir kitų autorių pasiūlytais skaičiavimo metodais.

**Reikšminiai žodžiai:** betonas, įtempiai, deformacijos, ašinė jėga, pleišėjimas.

## STRESS-STRAIN RESPONSE OF REINFORCED CONCRETE MEMBER SUBJECTED TO AXIAL TENSION

Rokas Girdžius, Gintaris Kaklauskas, Renata Zamblauskaitė

*Dept of Bridges and Special Structures, Vilnius Gediminas Technical University,  
Saulėtekio al. 11, LT-10223 Vilnius, Lithuania  
E-mail: [bridge@st.vgtu.lt](mailto:bridge@st.vgtu.lt)*

*Received 15 January 2007; accepted 7 June 2007*

**Abstract.** This paper discusses the load and deflection relationship of reinforced concrete members subjected to axial tension. A new tension stiffening relationship depending on tensile strength of concrete, reinforcement ratio, and the ratio of modulus of elasticity of steel and concrete has been proposed. The results obtained were compared with the numerical test data and the formulas proposed by other authors.

**Keywords:** concrete, stress-strain response, axial force, cracking.

### 1. Įžanga

Dar devyniolikto šimtmečio pabaigoje atlikti tempiamųjų armuotų prizmių bandymai [2] parodė, kad šių bandinių vidutinės deformacijos buvo daug mažesnės už armatūros strypų (be betono) deformacijas. Tai buvo aiškina ma supleišėjusio betono gebėjimu atlaikyti tempimo įtempius tarp plyšių. Tas ir lėmė bendrą elemento standumo padidėjimą.

Vertinant šį reiškinį pagal Euronormų (EC2) [1] skaičiavimo metodą, gelžbetoniniame elemente išskiriami nesupleišę ir supleišęję ruožai. Kai yra nesupleišęjęs gelžbetoninis elementas, imama, kad armatūra yra visiškai su-

kibusi su betonu, t. y. armatūra ir betonas deformuojasi kartu. Supleišėjusiame elemente plyšio vietoje visą tempimo jėgą atlaiko armatūra, o tarp plyšių – armatūra ir betonas. Kadangi armatūra praslysta betone, tai tempimo jėga, kurią ji perima, kinta elemento ilgiu.

Tempiamojo gelžbetoninio elemento poslinkiai skaičiuojami darant prielaidą, jog deformacijos tempiamojo elemento ilgiu pasiskirsčiusios tolygiai. Jos gaunamos, imant deformacijų vidurkį plyšio vietoje ir tarp jų. Toks deformacijų vidurkis įvertinamas viso elemento ilgio atžvilgiu.

Šiame straipsnyje, remiantis EC2 [1] tempiamojo gelžbetoninio elemento apkrovos-poslinkio funkcija, pasiūlyta

nauja supleišėjusio tempiamojo betono vidutinių įtempių ir deformacijų priklausomybė. Ji gauta, taikant vidutinių deformacijų modelį, ir palyginta su kitų autorių skaičiavimo metodais [3–6].

## 2. Centriškai tempiamo gelžbetoninio elemento apkrovos-poslinkio priklausomybė pagal EC2 skaičiavimo metodą [1]

Pagal EC2 [1] (1 pav.) supleišėjusio tempiamojo gelžbetoninio elemento vidutinė deformacija apskaičiuojama taip:

$$\varepsilon_m = (1 - \xi)\varepsilon_{s1} + \xi\varepsilon_{s2}, \quad (1)$$

čia:  $\varepsilon_{s1}$  ir  $\varepsilon_{s2}$  – atitinkamai tempiamojo gelžbetoninio elemento nesupleišėjusio ir supleišėjusio ruožų deformacijos;  $\xi$  – interpoliacijos koeficientas:

$$\varepsilon_{s1} = \varepsilon_{c1} = \frac{P}{E_c(A_c + \alpha A_s)}, \quad (2)$$

$$\varepsilon_{s2} = \frac{P}{E_s A_s}, \quad (3)$$

$$\xi = 1 - \left( \frac{P_{cr}}{P} \right)^2 \quad (\text{kai } P > P_{cr}), \quad (4)$$

čia:  $A_c$  ir  $A_s$  – atitinkamai betono bei armatūros skerspjūvių plotai;  $\alpha = E_s / E_c$  – armatūros ( $E_s$ ) ir betono ( $E_c$ ) tamprumo modulių santykis;  $P$  – išorinė apkrova;  $P_{cr}$  – pleišėjimo apkrova nustatoma pagal šią formulę:

$$P_{cr} = f_{ct}(A_c + \alpha A_s), \quad (5)$$

čia:  $f_{ct}$  – tempiamasis betono stipris.

## 3. Centriškai tempiamo gelžbetoninio elemento betono įtempių skaičiavimas

Bet kurioje centriškai tempiamo gelžbetoninio elemento apkrovimo stadijoje išorinę apkrovą ( $P$ ) perima armatūra ir betonas (2 pav.):

$$P = \bar{N}_s + \bar{N}_c, \quad (6)$$

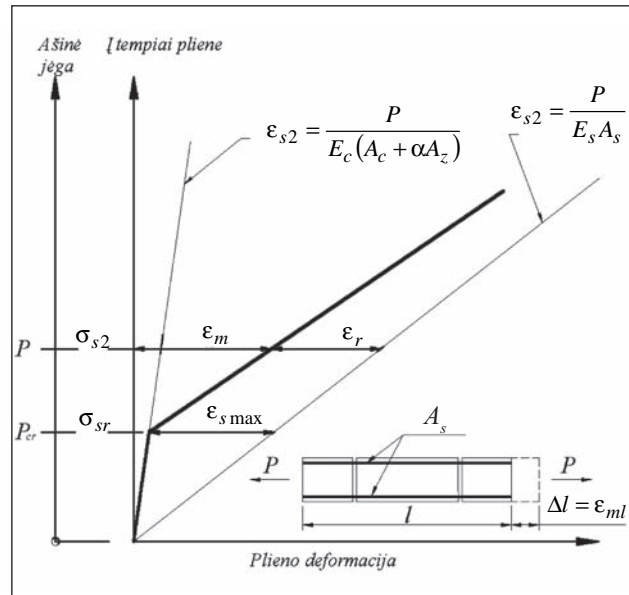
čia:  $\bar{N}_s$  ir  $\bar{N}_c$  – atitinkamai armatūros bei betono vidutinė įrąža:

$$\bar{N}_s = A_s E_s \varepsilon_m, \quad (7)$$

$$\bar{N}_c = P - \bar{N}_s. \quad (8)$$

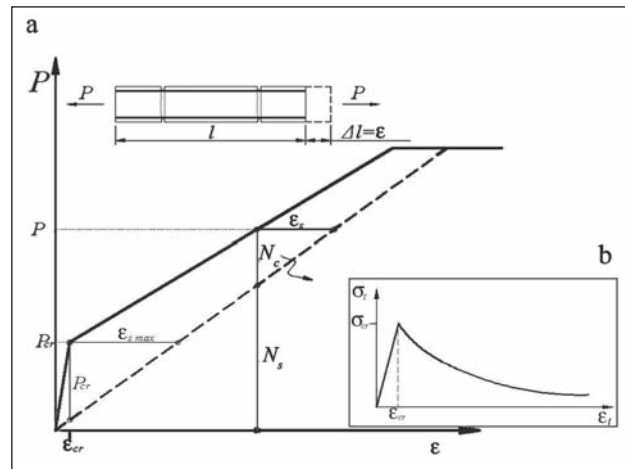
Tuomet vidutiniai tempiamojo betono įtempiai apskaičiuojami pagal išraišką:

$$\sigma_t = \frac{P - A_s E_s \varepsilon_m}{A_c}. \quad (9)$$



1 pav. Apkrovos-deformacijos grafikas pagal EC2 [1]

Fig 1. A relationship of load versus steel strain according to EC2 [1]



2 pav. Tempiamojo elemento elgsena: a – tempiamojo gelžbetoninio elemento apkrovos-poslinkio grafikas; b –  $\sigma_t - \varepsilon_t$  priklausomybė

Fig 2. Behaviour of tensile member: a – load-strain diagram; b –  $\sigma_t - \varepsilon_t$  curve

Supleišėjusio elemento betonui tenkanti vidutinė įrąža kartais įvertinama taip [3–6]:

$$\bar{N}_c = \beta P, \quad (10)$$

čia  $\beta$  – koeficientas, priklausantis nuo tempimo įtempių supleišėjusiam betone.

Yra pasiūlyta keletas koeficiento  $\beta$ , charakterizuojančio tempiamojo betono darbą tarp plyšių, priklausomybių [3–6]:

$$\beta = (1 + \sqrt{500\epsilon_m})^{-1} \quad (\text{Collins ir Mitchel [7]}), \quad (11)$$

$$\beta = (\epsilon_{cr} / \epsilon_m)^{0,4} \quad (\text{Belarbi ir Hsu [6]}), \quad (12)$$

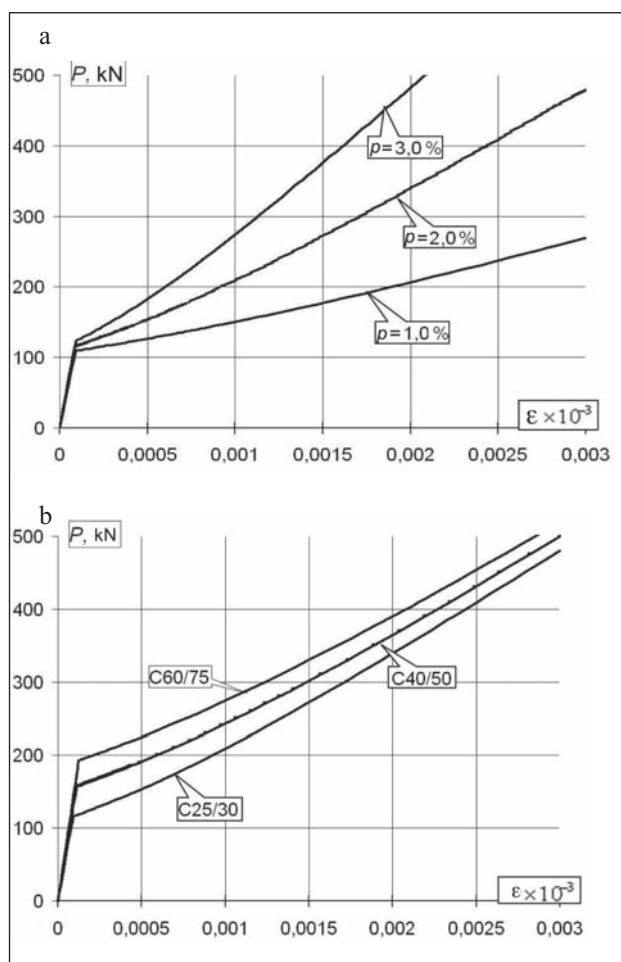
$$\beta = e^{-800(\epsilon_{sf} - \epsilon_{cr})} \quad (\text{P. H. Bischoff [3, 4]}), \quad (13)$$

čia:  $\epsilon_{sf}$  – armatūros deformacija;  $\epsilon_{cr}$  – betono pleišėjimo deformacija.

Priklausomybės (11–13) rodo  $\sigma_t - \epsilon_t$  diagramos kintamąją dalį (2 pav., a).

#### 4. Skaitinis eksperimentas

Skaitiniame eksperimente išnagrinėti 135 gelžbetoniniai elementai, turintys skirtingą armavimo koeficientą ( $p = 0,4; \dots 3,0 \%$ ), betono klasę (C25/30, C40/50 ir C60/75) bei armatūros tamprumo modulį (190, 200 ir 210 GPa). Šių elementų apkrovos ir deformacijos diagramų pavyzdžiai parodyti 3 pav.



3 pav. Centriškai tempiamų gelžbetoninių elementų apkrovos-poslinkių priklausomybės nuo: a – armavimo koeficiento; b – betono klasės

Fig 3. Dependence of load-strain relationships on: a – reinforcement ratio; b – concrete grade

Supleišėjusio tempiamojo betono darbas tarp plyšių modeliuojamas vidutinių įtempių-deformacijų diagrama, gauta iš tempiamųjų gelžbetoninių elementų skaitinių eksperimentų. Pritaikius (9) išraišką, gautos santykinų įtempių  $\sigma / \sigma_{cr}$  ir santykinų deformacijų  $\epsilon / \epsilon_{cr}$  priklausomybės (4 pav.) nuo armavimo koeficiento, tempiamojo betono stiprio bei armatūros tamprumo modulio.

Atlikus regresinę analizę nustatyta, kad didžiausią įtaką  $\sigma_t - \epsilon_t$  priklausomybei turi armavimo koeficientas ( $p$ ), tempiamasis betono stipris ( $f_{cm}$ ) bei armatūros ir betono tamprumo modulių santykis (a). Tempiamųjų gelžbetoninių elementų skerspjūvio matmenys rezultatams įtakos neturi.

#### 5. Empirinė centriškai tempiamo gelžbetoninio elemento $\sigma_t - \epsilon_t$ priklausomybė pagal EC2 [1]

Įvertinant supleišėjusio tempiamojo gelžbetoninio elemento darbą tarp plyšių, svarbu, kad jo deformacijų apskaičiavimo metodas būtų tikslus ir paprastas. Kaip buvo minėta, didžiausią įtaką  $\sigma_t - \epsilon_t$  priklausomybei turi armavimo koeficientas ( $p$ ) ir betono charakteringasis stipris ( $f_{ck}$ ).

Atlikus skaitinio eksperimento rezultatų analizę nustatyta, kad  $\sigma_t - \epsilon_t$  diagramos (5 pav.) krintančiąją dalį galima aprašyti tokia priklausomybe:

$$\sigma_t = \frac{f_{ct}}{1 + A \left( \frac{\epsilon}{\epsilon_{cr}} \right)^B}, \quad (14)$$

čia  $A$  ir  $B$  – koeficientai.

Skaičiavimams supaprastinti, koeficiento  $B$  reikšmė imta nekintama, t. y.  $B = 1,15$ . Koeficientas  $A$  nustatomas taip:

$$A = 0,0022 \cdot (2p\alpha - 1). \quad (15)$$

Pateiktame 5 pav. vidutinių betono įtempių-deformacijų kreivę sudaro dvi dalys. Jos kylančioji dalis apibūdina nesupleišėjusio tempiamojo betono darbą, krintančioji akumuliuoja pleišėjimo ir betono darbo tarp plyšių efektus.

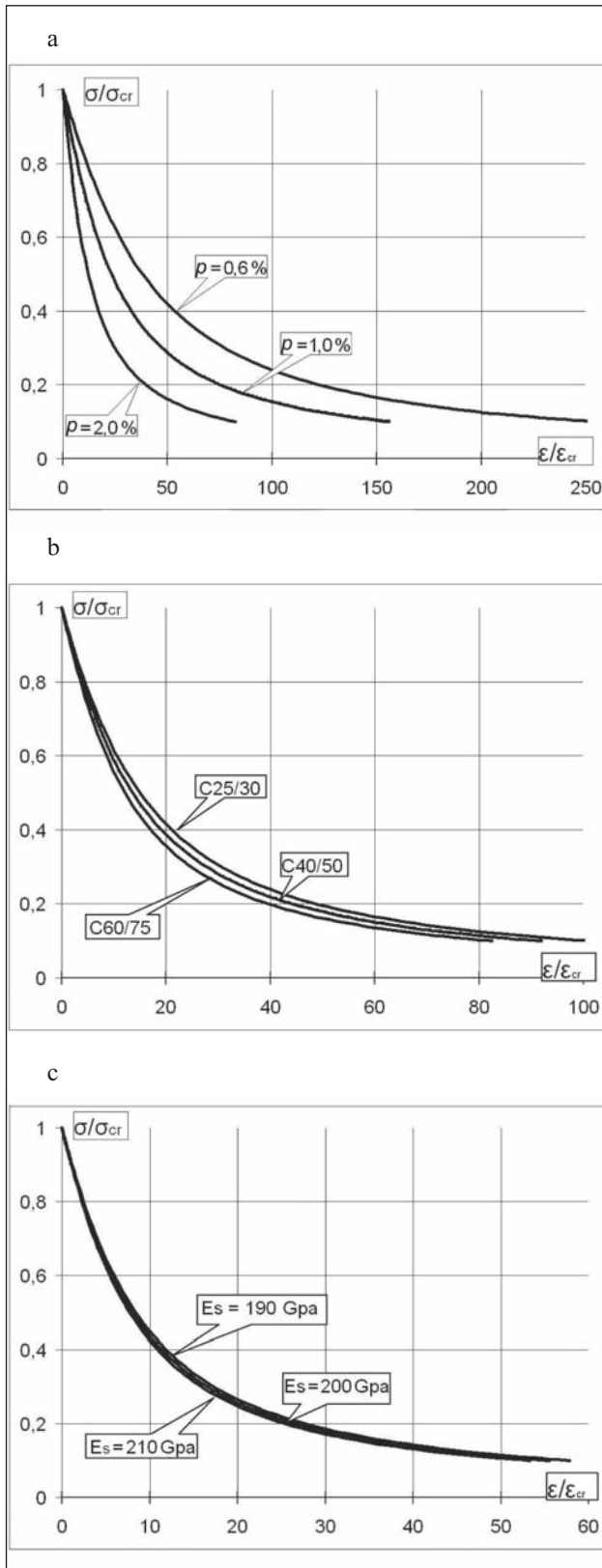
Supleišėjusio tempiamojo betono įtempių, nustatytų skaitiniu būdu bei apskaičiuotų pasiūlytą (14) išraišką, priklausomybę nuo deformacijų skirtingoms betono klasėms bei armavimo koeficientams pateikta 6 pav.

7 pav. parodyta siūlomosios priklausomybės paklaida, lyginant su gautąja iš skaitinio eksperimento. Kaip matyti, imant įvairias armavimo koeficiento ir deformacijų reikšmes, paklaida nesiekia 2 %. 8 pav. siūlomoji priklausomybė (14), imant  $p = 1 \%$  ir  $\alpha = 5,87$ , palyginta su kitų autorių kreivėmis.

#### 6. Išvados

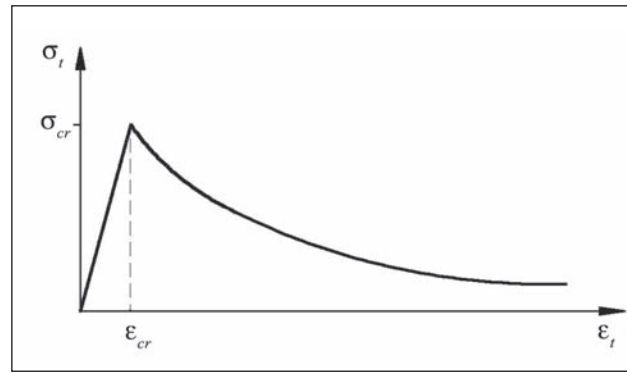
1. Pasiūlyta centriškai tempiamo supleišėjusio gelžbetoninio elemento betono įtempių ir deformacijų priklausomybė pagal EC2 [1].

2. Nustatyta, kad supleišėjusio tempiamojo betono vidutinių įtempių ir deformacijų priklausomybė priklauso



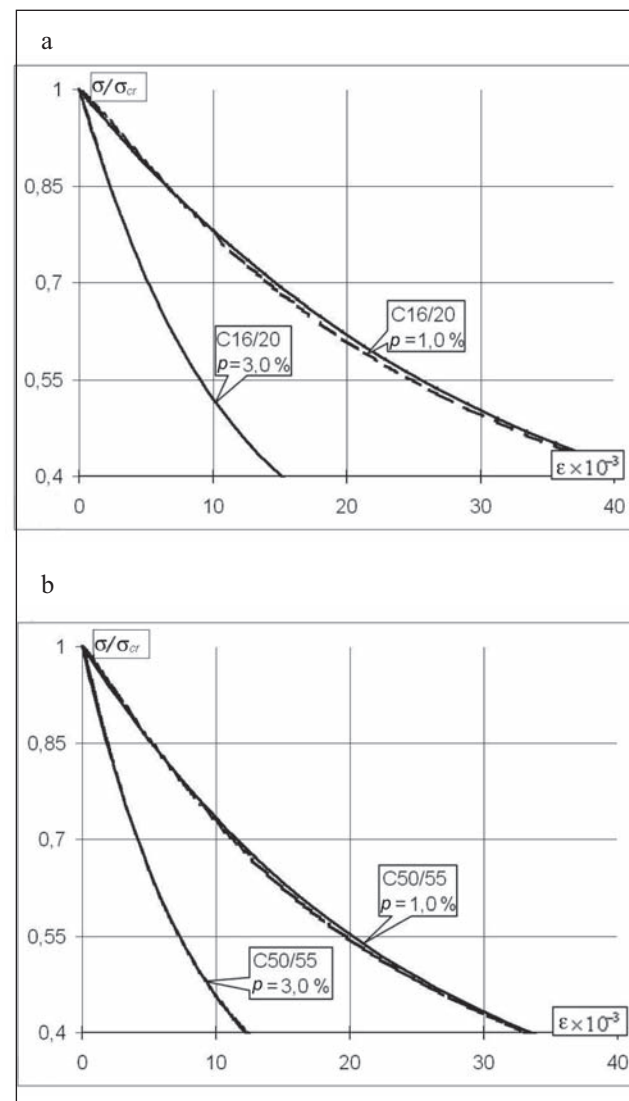
4 pav. Centriškai tempiamų gelžbetoninių elementų  $\sigma / \sigma_{cr}$  ir  $\epsilon / \epsilon_{cr}$  priklausomybės nuo: a – armavimo koeficiento; b – tempiamojo betono stiprio; c – armatūros tamprumo modulio

Fig 4. Dependence of derived  $\sigma / \sigma_{cr}$  and  $\epsilon / \epsilon_{cr}$  relationships on: a – reinforcement ratio; b – tensile strength of concrete; c – elasticity modulus of reinforcement



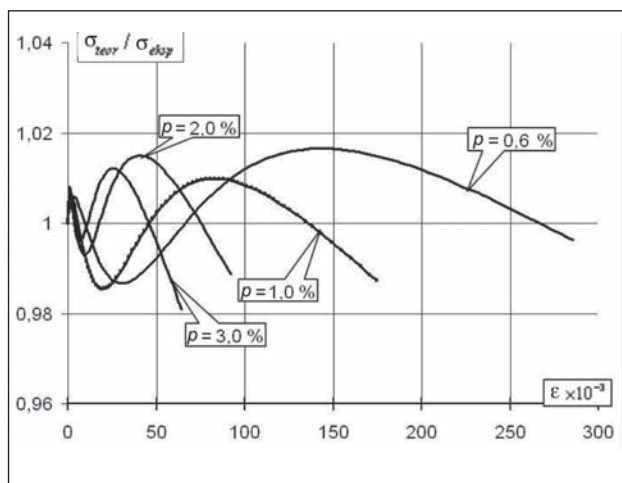
5 pav. Centriškai tempiamų gelžbetoninių elementų  $\sigma_t - \epsilon_t$  priklausomybė pagal pasiūlytą (14) išraišką

Fig 5. Proposed tension stiffening relationship (14)



6 pav. Skaitiškai nustatytų ( - - - ) ir pagal (14) formulę ( — ) apskaičiuotų betono įtempių priklausomybė nuo deformacijų

Fig 6. A dependences of concrete stresses obtained according to (14) formula and these stresses calculated by numerical method on strain of axial tension concrete member



7 pav. Pasiūlytosios formulės (14) paklaida kintant deformacijai

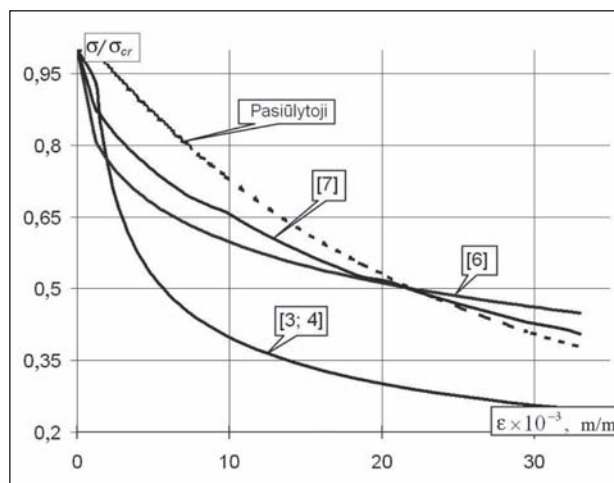
Fig 7. Errors of formula (14) with varying strain

nuo betono stiprio, armavimo koeficiento bei armatūros ir betono tamprumo modulių santykio.

3. Pasiūlytoji supleišėjusio centriškai tempiamo gelžbetoninio elemento betono įtempių ir deformacijų diagrama gerai atitinka skaitinio eksperimento rezultatus (paklaida neviršija 2 %).

#### Literatūra

1. Eurocode 2: Design of Concrete Structures – Part 1: General rules and rules for buildings. European Committee for Standardization. Pr-EN 1992-1, 2004. 230 p.
2. Considere. Influence des armatures metalliques sur le proprietes des mortiers et beton (Influence of Metal Reinforce-



8 pav. Skirtingų supleišėjusio betono įtempių-deformacijų kreivių lyginimas

8 figure. Stress-strain diagrams proposed by different authors

ment on the Properties of Mortar and Concrete). *Le Genie Civil*, 1899, 34(15), p. 229–233.

3. BISCHOFF, P. H. Effects of Shrinkage on Tension Stiffening and Cracking in Reinforced Concrete. *Canadian Journal of Civil Engineering*, 2001, 28(3), p. 363–374.
4. BISCHOFF, P. H. Tension Stiffening and Cracking of High-Strength Reinforced Concrete Tension Members. *ACI Structural Journal*, 2004, 101(4), p. 447–456.
5. GHALI, A.; FAVRE, R. *Concrete Structures: Stresses and Deformations*. 2nd Edition, E&FN Spon, London, 1994. 444 p.
6. COLLINS, M. P.; MITCHELL, D. *Prestressed concrete structures*. Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1991. 766 p.
7. TORRES, L. I.; LOPEZ-ALMANSA, F.; BOZZO, L. M. Tension-Stiffening Model for Cracked Flexural Concrete Members. *ASCE Journal of Structural Engineering*, 2004, p. 1243–1251.

**Rokas GIRDŽIUS.** Younger science employer at the Department of Bridges and Special Structures, Vilnius Gediminas Technical University (VGTU), Lithuania. Research interests: deformation of RC and PC structures.

**Gintaris KAKLAUSKAS.** Professor and Head of Dept of Bridges and Special Structures at VGTU, Lithuania. PhD and Dr Habil at VGTU. Recipient of Fulbright Fellowship (for research work at the University of Illinois, Urbana-Champaign, 1996) and Marie Curie Fellowship (experienced researcher category, 2002-2003). Member of the FIB Task Group 4.1 “Serviceability Models”. Research interests: various topics of RC, particularly constitutive modelling and numerical simulation of RC structures.

**Renata ZAMBLAUSKAITĖ.** Younger science employer at the Department of Bridges and Special Structures, Vilnius Gediminas Technical University (VGTU), Lithuania. PhD (2005) at VGTU. Research interests: deformation of RC and PC structures.