Statyba

ISSN: 1392-1525 (Print) (Online) Journal homepage: https://www.tandfonline.com/loi/tcem19

ELEMENT DKT_CST FOR ANALYSIS OF LAMINATED ANISOTROPIC PLATES

E. Michnevič & R. Belevičius

ISSN 1392-1525. STATYBA - CIVIL ENGINEERING - 2000, VI tomas, Nr. 5

ELEMENTAS DKT_CST SLUOKSNIUOTŲ ANIZOTROPINIŲ PLOKŠTELIŲ ANALIZEI

E. Michnevič, R. Belevičius

Vilniaus Gedimino technikos universitetas

1. Įvadas

Šiuolaikinės gamybos technologijos leidžia gaminti įvairiausias sluoksniuotas ir sluoksniuotai armuotas, įvairiomis skaidulomis sutvirtintas medžiagas. Dėl puikių šių medžiagų savybių beveik visos iš jų gaminamos konstrukcijos yra lengvos ir plonasienės.

Nors sluoksniuotos struktūros plačiai naudojamos, šiuolaikinių kompozitų netiesinio deformavimo ir irimo teorijos bei matematinio modeliavimo metodai iki šiol nėra baigti net labiausiai paplitusiai kompozitų su polimerine matrica klasei. Dėl sluoksniuotoms struktūroms būdingų anizotropijos savybių nagrinėtini visi tempimo--gniuždymo ir lenkimo efektai, lenkimo-membraninių bei membraninių-šlyties efektų sąveikavimo reiškiniai.

Konstrukcijų, pagamintų iš tradicinių medžiagų, baigtinių elementų spektras analizei yra pakankamai platus. Tačiau sluoksniuotų plonasienių lenkiamų plokštelių uždaviniams, kur galima taikyti tik kelias deformacijų-įtempimų būvį supaprastinančias prielaidas, reikalingi specialūs sluoksniuoti baigtiniai elementai. Žinomas trikampis elementas TRIPLT [1] atitinka visus reikalavimus. Jis turi 50 laisvės laipsnių: trikampio viršūnėse nagrinėjami trys poslinkiai ir du posūkiai apie koordinačių ašis bei visų jų pirmosios išvestinės ašių kryptimis, o centrinis mazgas turi pirmuosius penkis laisvės laipsnius. Tokio sudėtingo elemento įtraukimas į esamas baigtinių elementų programas keltų daugybę įvairaus pobūdžio keblumų. Todėl išlieka pakankamai tikslių, efektyvių, praktiškos formos baigtinių elementų sluoksniuotoms lenkiamoms plokštelėms, kurioms nebūtų keliami jokie skerspjūvio simetrijos reikalavimai, poreikis.

Šiame darbe pateiktos sluoksniuoto anizotropinio trikampio baigtinio elemento DKT_CST [2], kuriame įvertinti visi minėti membraniniai bei lenkimo poveikių efektai, tačiau atsisakyta šlyties efektų, struktūrinių matricų išraiškos. Toks baigtinis elementas gali būti panaudotas sluoksniuotoms ortotropinėms lenkiamoms plokštelėms, plokštelių atskiroms zonoms arba sijoms modeliuoti, kai šlyties deformacijos nėra itin svarbios.

2. Matematiniai modeliai

Dėl membraninių įtempimų įtakos tikrieji plokštelės poslinkiai yra žymiai mažesni už nustatytus pagal tiesinę teoriją. Diskretųjį tokio uždavinio modelį [3] galima užrašyti kaip netiesinių algebrinių lygčių sistemą:

$$[K(\delta)]\,\delta - \mathbf{F} = 0, \qquad (1)$$

ansamblio standumo matrica priklauso nuo poslinkių δ dydžio; $\mathbf{F}$ – išorinių apkrovų vektorius.

Netiesinių lygčių sistemoms spręsti dažniausiai taikomas iteracinis Niutono ir Rafsono metodas. Kiekviename iteracinio proceso žingsnyje apytikslis sprendinys δ_n, kuriam išorinių ir vidinių jėgų nesąryšis $\psi_n \neq 0$, patikslinamas sprendžiant tiesinių lygčių sistemą:

$$\Delta\delta_{n+1} = -[K_T]_n^{-1}\psi_n, \qquad (2)$$

$$[K_T] = [K_0] + [K_\sigma] + [K_L], \qquad (3)$$

$[K_T]$ – tangentinių standumų matrica; $[K_0]$ – tiesinė standumo matrica; $[K_\sigma]$ – pradinių įtempimų matrica; $[K_L]$ – didelių poslinkių matrica. Nesąryšis ψ_n skaičiuojamas pagal įtempimus σ_n:

$$\psi(\delta) = \int_V [\overline{B}]^T \sigma\, dV - \mathbf{F} = 0, \qquad (4)$$

$[\overline{B}]$ – netiesinė matrica, deformacijas susiejanti su poslinkiais.

Atskiras geometriškai netiesinio uždavinio atvejis yra pradinio pastovumo uždavinys [3], kai matrica $[K_L] = 0$.

Dinamikos uždaviniai aprašomi lygtimi:

$$[K_0]\delta+[C]\frac{\partial}{\partial t}\delta+[M]\frac{\partial^2}{\partial t^2}\delta+\mathbf{F}=0, \qquad (5)$$

$[C]$ ir $[M]$ – slopinimo ir masių matricos.

Atskiras dinamikos uždavinio atvejis yra tikrinių reikšmių uždavinys [3, 4], kai matrica $[C]=0$ ir $\mathbf{F}=0$.

3. Elemento DKT_CST formulavimas

Baigtinis elementas suformuluotas kaip lenkiamojo (DKT) ir membraninio (CST) elementų derinys [2, 5]. CST elementas turi tris mazgus, pirmosios eilės interpoliacinę funkciją ir po du laisvės laipsnius – poslinkius kiekviename mazge. DKT elementas [6] turi tris mazgus ir tris laisvės laipsnius – įlinkį ir du posūkius kiekviename mazge, elemento interpoliacinė funkcija turi atitikti C° suderinamumo reikalavimus. Kompozitinei plokštelei ryšys tarp įtempimų ir deformacijų užrašomas taip:

$$\begin{aligned}\mathbf{N}&=\left[D^{pl}\right]\mathbf{e}^0+\left[D^{plb}\right]\mathbf{k},\\ \mathbf{M}&=\left[D^{plb}\right]\mathbf{e}^0+\left[D^{b}\right]\mathbf{k},\end{aligned} \qquad (6)$$

$\mathbf{N}$ ir $\mathbf{M}$ – membraniniai bei lenkimo įtempimai; $\left[D^{pl}\right]$, $\left[D^{plb}\right]$, $\left[D^{b}\right]$ – akumuliacinės tamprumo matricos, kurios gaunamos sudedant sluoksnių tamprumo matricas [5, 7]; $\mathbf{e}^0$ – vidurinio paviršiaus membraninės deformacijos; $\mathbf{k}$ – kreivių vektorius.

Lenkimo deformacijos sukelia deformacijas plokštumoje ir atvirkščiai (6). Šis efektas įvertinamas pagal jungiamųjų standumų matricą $\left[K_0^{plb}\right]$.

Elemento struktūrinės matricos sudaromos iš membraninio ir lenkiamojo elementų matricų, kurios sujungiamos į globaliąją elemento matricą taip, kaip to reikia elemento laisvės laipsnių išdėstymui.

Elemento kiekvieno mazgo laisvės laipsnių vektorius:

$$\delta_i=\{u_i,v_i,\omega_i,\theta_{xi},\theta_{yi},\theta_{zi}\}^T, \qquad (7)$$

u_i,v_i,ω_i – mazgo poslinkiai; $\theta_{xi},\theta_{yi},\theta_{zi}$ – mazgo posūkiai aplink atitinkamas ašis.

Elemento standumo matrica:

$$[K_0]=\begin{bmatrix}\left[K_0^{pl}\right] & \left[K_0^{plb}\right]\\ \left[K_0^{plb}\right]^T & \left[K_0^{b}\right]\end{bmatrix}, \qquad (8)$$

kur $\left[K_0^{pl}\right]$, $\left[K_0^{b}\right]$ ir $\left[K_0^{plb}\right]$ – membraninė, lenkimo ir jungiamųjų standumų matricos.

$$\left[K_0^{pl}\right]=A\left[B_0^{pl}\right]^T\left[D^{pl}\right]\left[B_0^{pl}\right], \qquad (9)$$

$\left[B_0^{pl}\right]$ – tiesinė membraninė geometrinė matrica [2].

Matricos $\left[K_0^{pl}\right]$ elementai skaičiuojami taip:

$$\left[K_{0ij}^{pl}\right]=\frac{1}{2A}\begin{bmatrix}d_{11}^{pl}b_ib_j+d_{33}^{pl}c_ic_j & d_{12}^{pl}b_ic_j+d_{33}^{pl}c_ib_j\\ d_{12}^{pl}c_ib_j+d_{33}^{pl}b_ic_j & d_{22}^{pl}c_ic_j+d_{33}^{pl}b_ib_j\end{bmatrix},$$

$$i=1,2,3, \quad j=1,2,3, \qquad (10)$$

A – elemento plotas; d_{ij}^{pl} – akumuliacinės membraninės tamprumo matricos $\left[D^{pl}\right]$ elementai; b_i ir c_i – geometriniai koeficientai. Globalioji matrica yra sudaroma iš 9 tokių blokų.

$$\left[K_0^{b}\right]=\int_V\left[B_0^{b}\right]^T\left[D^{b}\right]\left[B_0^{b}\right]dV, \qquad (11)$$

$\left[B_0^{b}\right]$ – tiesinė lenkimo geometrinė matrica [2].

Po pertvarkymų [5] atskiro matricos $\left[K_0^{b}\right]$ elemento išraiška užrašoma taip:

$$\begin{aligned}K_{0ij}^{b}=\frac{1}{4A}\sum_{ii=1}^{3}\sum_{jj=1}^{3}\sum_{iii=1}^{3}\sum_{jjj=1}^{3}\Big[&d_{11}^{b}X_{i,ii}X_{j,jj}b_{iii}b_{jjj}+\\ &+d_{22}^{b}Y_{i,ii}Y_{j,jj}c_{iii}c_{jjj}+d_{12}^{b}\left(Y_{i,ii}X_{j,jj}c_{iii}b_{jjj}+X_{i,ii}Y_{j,jj}b_{iii}c_{jjj}\right)+\\ &+d_{33}^{b}\left(X_{i,ii}X_{j,jj}c_{iii}c_{jjj}+X_{i,ii}Y_{j,jj}c_{iii}b_{jjj}+Y_{i,ii}X_{j,jj}b_{iii}c_{jjj}+\right.\\ &\left.+Y_{i,ii}Y_{j,jj}b_{iii}b_{jjj}\right)\Big]\int_A\frac{\partial N_{iiz}\partial N_{jjjz}}{\partial L_{iii}\partial L_{jjj}}dA,\end{aligned}$$

$$i=1,2,\ldots,9, \quad j=1,2,\ldots,9, \qquad (12)$$

d_{ij}^{b} – akumuliacinės lenkimo tamprumo matricos $\left[D^{b}\right]$ elementai; N_i – interpoliacinės funkcijos; $X_{i,ii}$ ir $Y_{i,ii}$ – interpoliacinių funkcijų koeficientai; b_{iii} ir c_{iii} – geometriniai koeficientai; integralų skaičiavimas aprašytas toliau.

$$\left[K_0^{plb}\right]=\int_V\left[B_0^{pl}\right]^T\left[D^{plb}\right]\left[B_0^{b}\right]dV. \qquad (13)$$

Atlikus minėtus pertvarkymus gautos tokios matricos $\left[K_0^{plb}\right]$ elementų išraiškos:

$$K^{plb}_{0(2i-1)j} = \frac{1}{2A}\sum_{jj=1}^{3}\sum_{jjj=1}^{3}\Big[\Big(d_{11}^{plb} b_i X_{j,jj} + d_{33}^{plb} c_i Y_{j,jj}\Big) b_{jjj} +$$

$$+\Big(d_{12}^{plb} b_i Y_{j,jj} + d_{33}^{plb} c_i X_{j,jj}\Big) c_{jjj}\Big]\iint_A \frac{\partial N_{jjz}}{\partial L_{jjj}} dA, \tag{14}$$

$$K^{plb}_{0(2i)j} = \frac{1}{2A}\sum_{jj=1}^{3}\sum_{jjj=1}^{3}\Big[\Big(d_{12}^{plb} c_i X_{j,jj} + d_{33}^{plb} b_i Y_{j,jj}\Big) b_{jjj} +$$

$$+\Big(d_{22}^{plb} c_i Y_{j,jj} + d_{33}^{plb} b_i X_{j,jj}\Big) c_{jjj}\Big]\int_A \frac{\partial N_{jjz}}{\partial L_{jjj}} dA,$$

$$i = 1, 2, 3, \quad j = 1, 2, ..., 9, \tag{15}$$

d_{ij}^{plb} – akumuliacinės jungiamosios tamprumo matricos $\left[D^{plb}\right]$ elementai.

Elemento pradinių įtempimų matrica:

$$\left[K_\sigma\right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \left[K_\sigma^b\right] \end{bmatrix}, \tag{16}$$

$$\left[K_\sigma^b\right] = \int_V [G]^T [T][G] dV, \tag{17}$$

matrica $[G]$ priklauso tik nuo koordinačių [4]; $[T]$ – membraninių įtempimų matrica.

Atlikus pertvarkymus [5] gauta atskiro matricos $\left[K_\sigma^b\right]$ elemento išraiška:

$$\left[K_{\sigma ij}^b\right] = \sum_{ii=1}^{3}\sum_{jj=1}^{3}\Big[X_{i,ii}X_{j,jj}T_x + Y_{i,ii}Y_{j,jj}T_y +$$

$$+\left(X_{i,ii}Y_{j,jj} + Y_{i,ii}X_{j,jj}\right)T_{xy}\Big]\int_A N_{iiz}N_{jjz} dA, \tag{18}$$

$$i = 1, 2, ..., 9, \quad j = 1, 2, ..., 9,$$

T_x, T_y, T_{xy} – membraniniai įtempimai.

Elemento didelių poslinkių standumo matrica:

$$\left[K_L\right] = \int_V \begin{bmatrix} 0 & \left[K_L^{plb}\right] \\ \left[K_L^{plb}\right]^T & \left[K_L^b\right] \end{bmatrix} dV, \tag{19}$$

$\left[K_L^b\right]$ ir $\left[K_L^{plb}\right]$ – netiesinės lenkimo ir jungiamųjų standumų matricos.

$$\left[K_L^{plb}\right] = \int_V \left[B_0^{pl}\right]^T \left[D^{pl}\right]\left[B_L^b\right] dV, \tag{20}$$

$\left[B_L^b\right]$ – netiesinė lenkimo geometrinė matrica [3].

Atlikus pertvarkymus [5] gautos tokios matricos $\left[K_L^{plb}\right]$ elementų išraiškos:

$$K_{L\ i,j}^{plb} = \frac{1}{2A}\sum_{k=1}^{9}\sum_{jj=1}^{3}\sum_{kk=1}^{3}\Big[\delta_k^b \times \Big(X_{j,jj}X_{k,kk} \times$$

$$\times\left(b_l d_{11}^{pl} + c_l d_{31}^{pl}\right) + Y_{j,jj}Y_{k,kk}\left(b_l d_{12}^{pl} + c_l d_{32}^{pl}\right) +$$

$$+\left(Y_{j,jj}X_{k,kk} + X_{j,jj}Y_{k,kk}\right)\left(b_l d_{13}^{pl} + c_l d_{33}^{pl}\right)\Big)\Big] \times \tag{21}$$

$$\times \int_A N_{jjz}N_{kkz} dA,$$

$$K_{L\ (i+1),j}^{plb} = \frac{1}{2A}\sum_{k=1}^{9}\sum_{jj=1}^{3}\sum_{kk=1}^{3}\delta_k^b \times \Big(X_{j,jj}X_{k,kk} \times$$

$$\times\left(b_l d_{31}^{pl} + c_l d_{21}^{pl}\right) + Y_{j,jj}Y_{k,kk}\left(b_l d_{32}^{pl} + c_l d_{22}^{pl}\right) +$$

$$+\left(Y_{j,jj}X_{k,kk} + X_{j,jj}Y_{k,kk}\right)\left(b_l d_{33}^{pl} + c_l d_{23}^{pl}\right)\Big) \times \tag{22}$$

$$\times \int_A N_{jjz}N_{kkz} dA,$$

$$i = 1, 3, 5, \quad l = 1, 2, 3, \quad j = 1, 2, ..., 9,$$

δ_k^b – lenkiamojo elemento mazgo poslinkis arba posūkis:

$$\delta^b = \left\{\omega_1, \theta_{x1}, \theta_{y1}, \omega_2, \theta_{x2}, \theta_{y2}, \omega_3, \theta_{x3}, \theta_{y3}\right\}^T. \tag{23}$$

$$\left[K_L^b\right] = \int_V \Big[\left[B_0^b\right]^T \left[D^{plb}\right]^T \left[B_L^b\right] + \left[B_L^b\right]^T \left[D^{plb}\right]\left[B_0^b\right] +$$

$$+\left[B_L^b\right]^T \left[D^{pl}\right]\left[B_L^b\right]\Big] dV.$$

Akumuliacinė tamprumo matrica $\left[D^{plb}\right]$ yra simetrinė, todėl (23) galima užrašyti taip:

$$\left[K_L^b\right] = \left[K_{LB}^b\right]^T + \left[K_{LB}^b\right] + \left[K_{LC}^b\right], \tag{24}$$

$$\left[K_{LB}^b\right] = \int_V \left[B_L^b\right]^T \left[D^{plb}\right]\left[B_0^b\right] dV, \tag{25}$$

$$\left[K_{LC}^b\right] = \int_V \left[B_L^b\right]^T \left[D^{pl}\right]\left[B_L^b\right] dV. \tag{26}$$

Po pertvarkymų [5] matricų $\left[K_{LB}^b\right]$ ir $\left[K_{LC}^b\right]$ atskirų elementų išraiškos užrašomos taip:

$$K_{LB\ i,j}^{b}=\frac{1}{2A}\sum_{k=1}^{9}\sum_{ii=1}^{3}\sum_{jj=1}^{3}\sum_{kk=1}^{3}\sum_{jjj=1}^{3}(\delta_k^b\times$$

$$\times\left[\begin{pmatrix} X_{i,ii}X_{k,kk}d_{11}^{plb}+Y_{i,ii}Y_{k,kk}d_{21}^{plb}+\\ +\left(Y_{i,ii}X_{k,kk}+X_{i,ii}Y_{k,kk}\right)d_{31}^{plb}\end{pmatrix}X_{j,jj}b_{jjj}+\right.$$

$$+\begin{pmatrix} X_{i,ii}X_{k,kk}d_{12}^{plb}+Y_{i,ii}Y_{k,kk}d_{22}^{plb}+\\ +\left(Y_{i,ii}X_{k,kk}+X_{i,ii}Y_{k,kk}\right)d_{32}^{plb}\end{pmatrix}Y_{j,jj}c_{jjj}+$$

$$+\begin{pmatrix} X_{i,ii}X_{k,kk}d_{13}^{plb}+Y_{i,ii}Y_{k,kk}d_{23}^{plb}+\\ +\left(Y_{i,ii}X_{k,kk}+X_{i,ii}Y_{k,kk}\right)d_{33}^{plb}\end{pmatrix}\times$$

$$\left.\times\left(X_{j,jj}c_{jjj}+Y_{j,jj}b_{jjj}\right)\right]\times\int_A N_{iiz}N_{kkz}\frac{\partial N_{jjz}}{\partial L_{jjj}}dA),$$

$$i=1,2,\ldots,9,\quad j=1,2,\ldots,9. \tag{27}$$

$$K_{LC\ i,j}^{b}=\sum_{k=1}^{9}\sum_{l=1}^{9}\sum_{ii=1}^{3}\sum_{jj=1}^{3}\sum_{kk=1}^{3}\sum_{ll=1}^{3}\Bigg(\delta_k^b\delta_l^b\times$$

$$\times\left[X_{k,kk}X_{l,ll}\begin{pmatrix}X_{i,ii}X_{j,jj}d_{11}+X_{i,ii}Y_{j,jj}d_{13}+\\ +Y_{i,ii}X_{j,jj}d_{31}+Y_{i,ii}Y_{j,jj}d_{33}\end{pmatrix}+\right.$$

$$+Y_{k,kk}Y_{l,ll}\begin{pmatrix}Y_{i,ii}Y_{j,jj}d_{22}+Y_{i,ii}X_{j,jj}d_{23}+\\ +X_{i,ii}Y_{j,jj}d_{32}+X_{i,ii}X_{j,jj}d_{33}\end{pmatrix}+$$

$$\left.+X_{k,kk}Y_{l,ll}\begin{pmatrix}X_{i,ii}Y_{j,jj}d_{12}+Y_{i,ii}X_{j,jj}d_{21}+\\ +X_{i,ii}X_{j,jj}d_{31}+Y_{i,ii}Y_{j,jj}d_{32}+\\ +Y_{i,ii}Y_{j,jj}d_{23}+X_{i,ii}Y_{j,jj}d_{33}+\\ X_{i,ii}X_{j,jj}d_{13}+Y_{i,ii}X_{j,jj}d_{33}\end{pmatrix}\right]\times$$

$$\times\int_A N_{iiz}N_{jjz}N_{kkz}N_{llz}dA\Bigg),$$

$$i=1,2,\ldots,9,\quad j=1,2,\ldots,9. \tag{28}$$

Išorinių ir vidinių jėgų nesąryšis (4) skaičiuojamas taip:

$$\psi_i=\begin{Bmatrix}\frac{1}{2}\left[K_L^{plb}\right]\delta_i^b\\ \begin{pmatrix}\left[K_L^{plb}\right]\delta_i^{pl}+\frac{1}{2}\left[K_{LB}^b\right]^T\delta_i^b+\\ +\left[K_{LB}^b\right]\delta_i^b+\frac{1}{2}\left[K_{LC}^b\right]\delta_i^b\end{pmatrix}\end{Bmatrix}, \tag{29}$$

i – iteracijos numeris; matricos $\left[K_L^{plb}\right]$, $\left[K_{LB}^b\right]$ ir $\left[K_{LC}^b\right]$ formuojamos pagal (i-1) iteracijoje suskaičiuotus poslinkius δ_i^{pl} ir δ_i^b.

Elemento vieno mazgo masių matrica:

$$m_j=\begin{bmatrix} m & & & & & \\ & m & & & & \\ & & m & & & \\ & & & \frac{H^2}{12}m & & \\ & & & & \frac{H^2}{12}m & \\ & & & & & 1{,}0E-15\end{bmatrix}, \tag{30}$$

$m=\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{k}\left(A\cdot H_i\cdot\rho_i\right)$, H – bendras plokštelės storis; A – elemento plotas; H_i – i-tojo sluoksnio storis; ρ_i – i-tojo sluoksnio tankis; k – sluoksnių skaičius; 1,0E-15 – atitinka fiktyvų posūkį apie statmeną elemento plokštumai ašį. Tokia reikšmė priskiriama, kad būtų išvengta skaičiavimo sunkumų, atsirandančių, kai visi viename mazge sueinantys elementai yra komplanarūs.

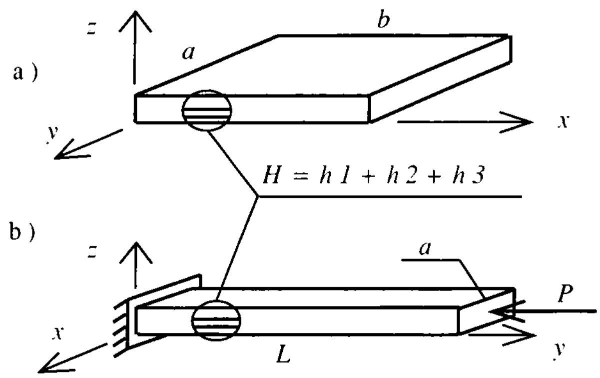
Integralų $\int_A \frac{\partial N_{jjz}}{L_{jjj}}dA$, $\int_A \frac{\partial N_{iiz}}{L_{iii}}\frac{\partial N_{jjz}}{L_{jjj}}dA$, $\int_A N_{iiz}N_{kkz}\frac{\partial N_{jjz}}{\partial L_{jjj}}dA$, $\int_A N_{iiz}N_{jjz}N_{kkz}N_{llz}dA$ reikšmės suskaičiuotos pagal paketą *Mathematica* ir saugomos masyvuose. Atrinkimui naudojami indeksai $iiz=\frac{i-3}{3}3+ii$, skaičiuojami pagal sveikaskaičio skaičiavimo taisykles. Toliau standumo matricos elementai sintezuojami skaitiškai. Toks matricos formavimo metodas pranašesnis už tradicinį skaitinį integravimą, nes skaičiavimams reikia mažiau laiko, be to, tai leidžia išvengti visų su skaitiniu integravimu susijusių paklaidų. Geometriškai netiesinio uždavinio sprendimui parašyta programa, kurioje realizuotas iteracinis Niutono ir Rafsono metodas.

4. Skaitiniai pavyzdžiai

Suformuoto baigtinio elemento kokybė tikrinių reikšmių, geometriškai netiesiniam ir pradinio pastovumo uždaviniams iliustruojama keliais testais:

1. *Tikrinių reikšmių uždavinys*

Skaičiavimams parinkta neįtvirtinta trijų sluoksnių kvadratinė plokštelė (1a pav.). Kad nebūtų prarastos kai kurios svyravimų formos, nagrinėjama visa plokštelė be simetrijos sąlygų įvertinimo. Plokštelės sluoksnių storiai: $h_1=0{,}1$, $h_2=0{,}15$, $h_3=0{,}25$; $a = b = 4{,}0$; tamprumo moduliai $E_{11}=E_{22}=2\times10^6$; Puasono koeficientai $\nu_{12}=\nu_{21}=0{,}3$; šlyties moduliai $G_{12}=0{,}77\times10^6$; tankiai $\rho=1000$.



1 pav. Skaičiuojamosios schemos

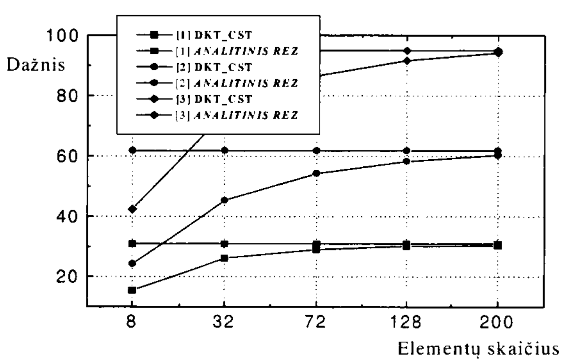
Fig 1. Computational schemes

Skaičiavimo rezultatų palyginimas su analitiniais [8] sprendiniais pateiktas 2 pav. ir 1 lentelėje. Nagrinėjamos plokštelės pirmosios šešios nulinės formos atitinka kietojo kūno judesius. Nenulinės formos pateiktos 3 pav.

1 lentelė. Pirmieji šeši nenuliniai dažniai

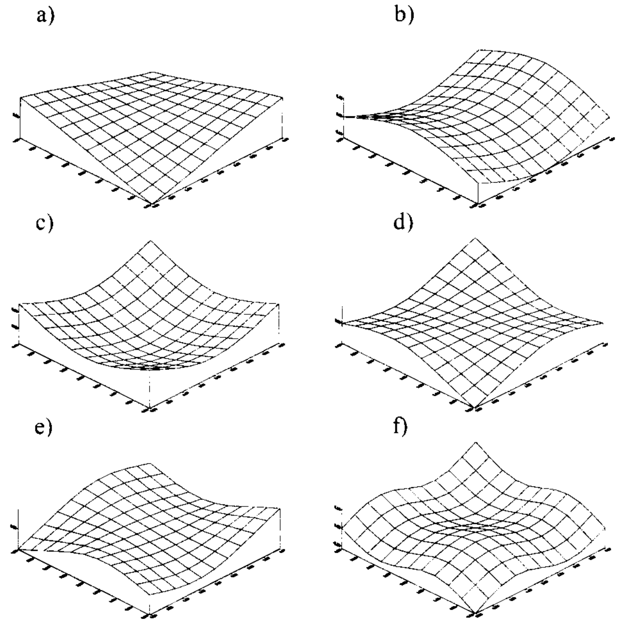
Table 1. The first six non-zero eigenfrequencies

	Elementų DKT_CST skaičius					Analitiniai rezultatai
	8	32	72	128	200	
1	15,47	26,19	29,10	30,17	30,34	31,0
2	24,31	45,31	54,29	58,31	60,36	61,8
3	42,41	74,66	86,56	91,70	94,27	95,0
4	48,44	121,5	158,0	175,0	183,9	-
5	83,54	160,4	181,8	190,1	194,1	-
6	128,5	359,2	453,3	502,0	528,8	-



2 pav. Pirmųjų trijų nenulinių dažnių konvergavimas

Fig 2. Convergence of first three eigenfrequencies



3 pav. Pirmosios šešios nenulinės formos

Fig 3. The first six eigenvectors

2. *Pradinio pastovumo uždavinys*

Skaičiavimams parinktas trijų sluoksnių strypas (1b pav.). Jo ilgis $L = 10$; plotis $a = 1{,}6$; sluoksnių storiai: $h_1 = 0{,}3$, $h_2 = 0{,}5$, $h_3 = 0{,}8$; tamprumo moduliai $E_{11} = E_{22} = 2\times10^6$; Puasono koeficientai $\nu_{12} = \nu_{21} = 0{,}3$; šlyties moduliai $G_{12} = 0{,}77\times10^6$; apkrova P=1,5.

Rastos kritinės jėgos ir atitinkamos pusiausvyros formos. Skaičiavimo rezultatai pateikti 2 lentelėje ir 4 pav.

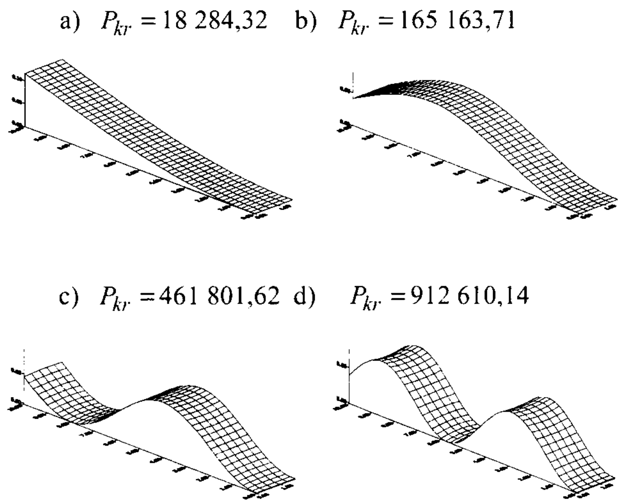
2 lentelė. Pirmoji kritinė jėga, skaičiavimų rezultatai

Table 2. The first critical force. Results of calculation

Elementų skaičius	P_{kr} (DKT_CST)	P_{kr} (analitinė)	Paklaida, [%]
20	18 305,42		1,39
80	18 305,16		1,38
180	18 291,22	18 054,76	1,31
320	18 287,16		1,29
500	18 284,32		1,27

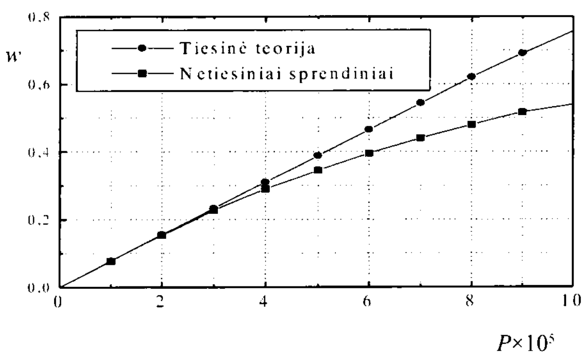
3. *Geometriškai netiesinis uždavinys*

Skaičiavimams parinkta standžiai įtvirtinta trijų sluoksnių kvadratinė plokštelė (1a pav.), koncentruota apkrova P pridėta centre. Plokštelės sluoksnių storiai: $h_1 = 0{,}2$, $h_2 = 0{,}3$, $h_3 = 0{,}5$; $a = b = 5{,}0$; tamprumo moduliai $E_{11} = E_{22} = 2\times10^6$; Puasono koeficientai $\nu_{12} = \nu_{21} = 0{,}3$; šlyties moduliai $G_{12} = 0{,}77\times10^6$.



4 pav. Pirmosios keturios pusiausvyros formos

Fig 4. The first four eigenshapes



5 pav. Centrinio mazgo įlinkis

Fig 5. Deflection of central point

Skaičiavimai rodo, kad lenkiamų plokštelių uždaviniams membraninių deformacijų efektas pasireiškia, kai poslinkiai viršija 0,25 plokštelės storio (5 pav.).

Literatūra

1. H. V. Lakshminarayana, S. Sridhara Murthy. A Shear-flexible Triangular Finite Element Model for Laminated Composite Plates // Int. J. Numer. Meth. Engng., 20, 1984, p. 591–623.
2. R. Belevičius, E. Michnevič, D. Rusakevičius. Sluoksniuotas ortotropinis diskretinės Kirchhofo teorijos elementas lenkiamoms plokštelėms // Mokslas, studijos, universiteto gyvenimas, Nr. 3(10). Lietuvos skaičiuojamosios mechanikos asociacijos IV-ojo seminaro medžiaga. Rinktiniai straipsniai. V.: Technika, 1996, p. 5–10.
3. O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor. The Finite Element Method. Vol 2. McGraw-Hill, 1991. 790 p.
4. K. J. Bathe, E. L. Wilson. Numerical method in finite element analysis. Prentice-Hall, 1976. 524 p.
5. R. Belevičius. Computer algebra in finite element method. Vilnius: Technika, 1994. 154 p.
6. J. L. Batoz, K. J. Bathe, L. W. Ho. A Study of Three-Node Triangular Plate Bending Elements // Int. J. Numer. Meth. Engng., 15, 1980, p. 1771–1812.
7. R. M. Jones. Mechanics of Composite Materials. Hemisphere Publishing Corporation, 1975. 355 p.
8. И. А. Биргер, Я. Г. Пановко. Прочность. Устойчивость. Колебания. Том 3. М.: Машиностроение, 1968, 567 с.

Įteikta 2000 10 23

ELEMENT DKT_CST FOR ANALYSIS OF LAMINATED ANISOTROPIC PLATES

E. Michnevič, R. Belevičius

Summary

The new finite element of multilayered built up with an arbitrary series of layers plate for plate bending problem is formulated on the ground of widely used, effective finite element Discrete Kirchhof Theory (DKT). The material of each layer is supposed to be different and orthotropic. Triangular element has 6 d.o.f.'s at each of 3 nodal points: 3 displacements and 2 rotations about co-ordinate axes. The 6th fictitious rotation about axis perpendicular to the element is also introduced due to numerical requirements. The element takes into account all the in-plane/out-of-plane effects except the shear. The element could find an application in the slab bending problems or in the plate, where the shear influence could be neglected, bending problems. The numerical examples are presented. Present solutions are compared with available analytical and numerical solutions.

Edvard MICHNEVIČ. PhD student. Vilnius Gediminas Technical University. Dept of Engineering Mechanics. Saulėtekio al. 11, LT-2040 Vilnius, Lithuania. E-mail: edmich@fm.vtu.lt

PhD student (1995). Research interests: finite element methods, analysis of laminated plates.

Rimantas BELEVIČIUS. Doctor Habil, Professor. Vilnius Gediminas Technical University. Dept of Engineering Mechanics. Saulėtekio al. 11, LT-2040 Vilnius, Lithuania. E-mail: rb@fm.vtu.lt

Doctor (1986), Doctor Habil (1994). Research interests: finite element methods, modelling of laminated structures.